Após esta breve tentativa de intuir algo à respeito da transformações necessárias de serem realizadas de forma a concordar com observações experimentais, voltemos a uma abordagem mais técnica, a obtenção das relações matemáticas de Lorentz.

Antes de obtermos as relações de Lorentz, vamos utilizar os postulados da relatividade em situações menos gerais (mais simples) a fim de encontrarmos relações de tempo e espaço (distância).

2.1.1 Dilatação do Tempo

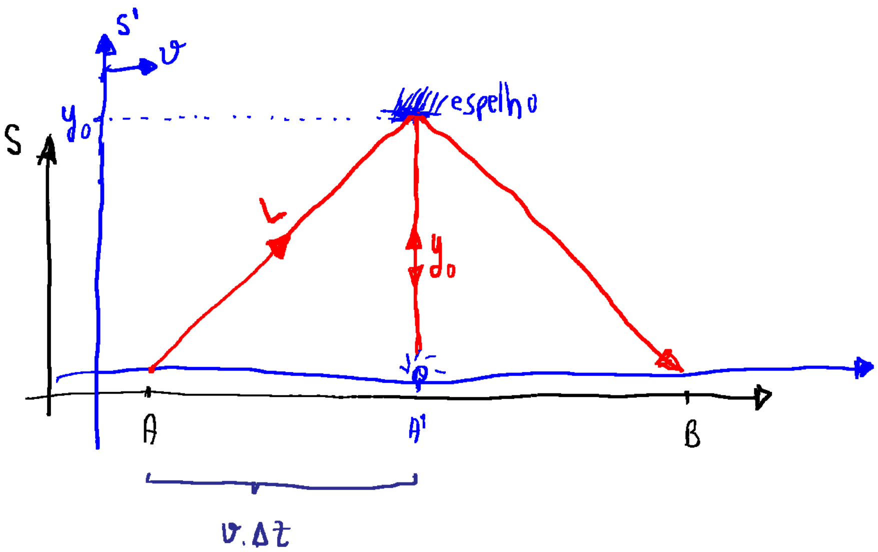

Figura 5: Sistemas referenciais inerciais S e S' com velocidade relativa v.

Vamos considerar a dinâmica representada na Fig.5. Um feixe de luz é acionado no sistema S', no ponto A'. Como sabemos, o pulso luminoso propaga em todas as direções, mas vamos nos ater somente ao feixe que vai em direção ao espelho situado em uma altura y_0 fixo em S' (ver Fig.5). Um observador fixo em S' (no ponto A') perceberá que o feixe de luz percorre uma distância y_0 em um tempo que ele medirá $\Delta t'/2$ (sendo $\Delta t'$ o tempo, medido em S', necessário para a luz ir e voltar ao ponto inicial); portanto medirá uma velocidade

$$c = \frac{y_0}{\Delta t'/2} \tag{1}$$

Por outro lado, um observador fixo no sistema S perceberá o pulso percorrendo uma distância L

em um tempo Δt medido em seu próprio relógio, afinal, S' está em movimento relativo à S. Este observador medirá uma velocidade

$$c = \frac{L}{\Delta t/2} \tag{2}$$

Através de uma relação triangular simples podemos relacionar L com y_0, resultando em

$$L = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2} \tag{3}$$

A Eq.(3) na Eq.(2) faz resultar em

$$c = \frac{\sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2}}{\Delta t/2}. \tag{4}$$

Adicionalmente, da Eq.(1), temos que $y_0 = c\Delta t'/2$. Isto na Eq.(4) $\Rightarrow$

$$\Delta t = \frac{2}{c}\sqrt{\left(\frac{c\Delta t'}{2}\right)^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \Delta t^2 = \frac{4}{c^2}\left(\frac{c\Delta t'}{2}\right)^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \Delta t^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \Delta t'^2$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} \tag{5}$$

Define-se

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

como fator de Lorentz.

Análise Como a velocidade v possui valor máximo c, então $\Delta t > \Delta t'$ sempre. Mas o que isto significa fisicamente?

Resposta: Para responder corretamente esta pergunta, basta voltarmos na origem do problema e verificar o significado de $\Delta t'$ e de Δt. O que fizemos foi medir a distância temporal entre dois eventos que ocorreram no sistema S'. Fizemos esta medida no próprio sistema S', obtendo $\Delta t'$; e fizemos a partir do sistema S, onde obtivemos Δt. Δt ser maior que $\Delta t'$ equivale a dizermos, por exemplo, que se a distância temporal entre dois eventos ocorridos no sistema S' foi de 100 anos (nascer e morrer de uma pessoa, por exemplo); a distância temporal entre os mesmos dois eventos medidos a partir de S é maior que 100 anos (poderia ser, dependendo da velocidade relativa v, 200 anos, por exemplo). Equivale a dizer que o tempo passa mais lentamente em S' que em S, afinal, olhando de S, um homen que viveria 100 anos se estivesse em repouso relativamente à S, viveu 200 anos "simplesmente"por estar com velocidade relativa à S.

É importante enfatizar que este fato só é percebido pelo observador em S. Para o observador em S' (e todos que lá habitam) não sentem que suas vidas estão prolongadas. Afinal, se tudo pulsa mais lentamente (o relógio, o pulsar do coração, o sono, o acordar, a puberdade, a menopalsa, o intervalo de tempo que se sente fome, o tempo que uma flor demora para desabrochar, o intervalo de tempo entre duas batidas das asas de um beija flor, etc...) não se percebe nada diferente e se sente vivendo 100 anos (na verdade são 100 anos para S') só não parecem ser para S.

A situação é simétrica; como não há referencial privilegiado, se uma observação a partir de S de um pulso de luz ocorrido em S' levou à conclusão que

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}}, \tag{6}$$

então uma observação a partir de S' de um pulso de luz ocorrido em S levaria à conclusão de que

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}. \tag{7}$$

Em primeira reação intuitiva parece haver uma incoerência entre as Equações 6 e 7, afinal, parecem dizer coisas diferentes: A Eq.(6) diz que $\Delta t > \Delta t'$ sempre (pois $\gamma > 1$), enquanto que a Eq.(7) diz o contrário. Este paradoxo é "popularmente"conhecido como paradoxo dos gêmeos, que diz:

Dois irmãos gêmeos, Pedro e Paulo, vivem na terra. Pedro decide realizar uma viagem em uma espaçonave capaz de alcançar velocidades comparáveis com a da luz. Durante a viagem, Pedro se encontra em um referencial S', da espaçonave, enquanto que Paulo está em um referencial S, na terra. Para Paulo, seu tempo Δt é sempre maior que $\Delta t'$, e por consequência disso, quando voltar Pedro estará mais jovem que Paulo. Por outro lado, Para pedro em S', a equação válida para observar eventos em S é a Eq.(7), ou seja, Pedro percebe ao contrário; percebe o tempo de Paulo passando mais lentamente.

Sendo assim, quando Pedro voltar quem estará mais jovem?

Resposta: Vamos resolver este paradoxo em partes.

(a) A simetria é válida; então pode-se afirmar que o tempo de Pedro (espaçonave) passa mais lentamente quando medido por Paulo (da terra) e o tempo de Paulo (na terra) passa mais lentamente quando medido por Pedro (da espaçonave). Nestes casos não faz sentido falar em comparação pois estão em referenciais diferentes.

(b) Uma comparação efetiva só será possível quando Pedro voltar para a terra, para o referencial de paulo, onde serão comparados. Para isso, teremos a seguinte dinâmica: (i) Pedro e paulo estavam juntos na terra, (ii) Pedro saiu do referencial inercial terra, foi acelerado (passando por outros referenciais) até chegar no referencial espaçonave onde ficou por um tempo, (iii) para voltar, Pedro deverá desacelerar (passando novamente por outros referenciais) etc... até retornar a terra, onde poderá ser comparado.

(c) Note que nesta dinâmica, o sistema onde a comparação será feita é a terra. É onde Paulo sempre esteve sem passar em momento nenhum por referenciais intermediários. Então é neste sistema que as equações acima sempre foram válidas, e portanto, Paulo estará mais velho que Pedro.

Enfatizando: A situação acima, o paradoxo, só é importante para efeito de comparação. Para sistemas inerciais com velocidade relativa. As equações 6 e 7 são aplicadas com sucesso em seus respectivos referenciais, ou seja, enquanto a espaçonave estiver com velocidade constante em relação a terra Pedro perceberá o tempo de Paulo passando mais lentamente, enquanto que Paulo perceberá o contrário.